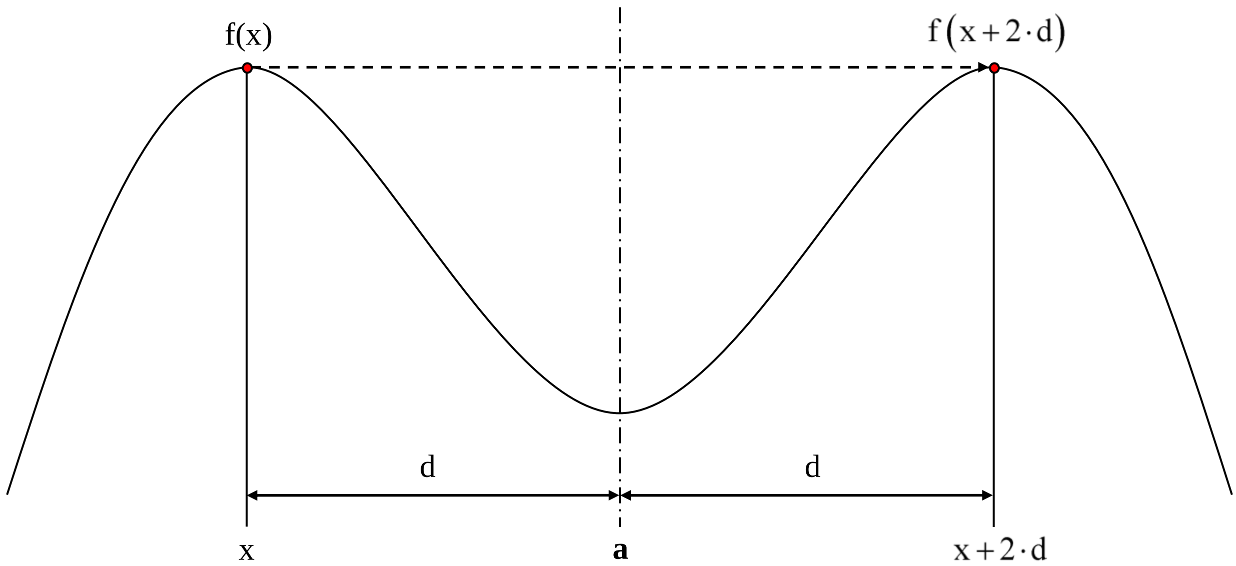
Symmetrie

Symmetrie (altgriech.: „Spiegelungsgleichheit“) liegt vor, wenn die Funktion durch Spiegelung auf sich selbst abgebildet werden kann. Die für das Aussehen einer Funktion relevanten Symmetrien lassen sich in die Achsensymmetrie und die Punktsymmetrie unterteilen.

Achsensymmetrie

Achsensymmetrie (auch: Axialsymmetrie) liegt vor, wenn die Funktion sich durch Spiegelung an einer senkrechten Achse auf sich selbst abbilden lässt. Ein Spezialfall ist die Symmetrie zur y-Achse.

<u>Achsensymmetrie:</u> **Spiegelung an senkrechter Achse (x = a).**



Zu jedem Punkt auf der Funktion gibt es einen anderen Punkt, der den gleichen Abstand zur Symmetrieachse hat und auch auf der Funktion liegt.

Bedingung

Die beiden Funktionswerte sind damit gleich:

$$f(x) = f(x + 2 \cdot d) \qquad | \; d = a - x$$

$$f(x) = f(x + 2 \cdot (a - x))$$

$$f(x) = f(x + 2 \cdot a - 2 \cdot x)$$

$$f(x) = f(-x + 2 \cdot a)$$

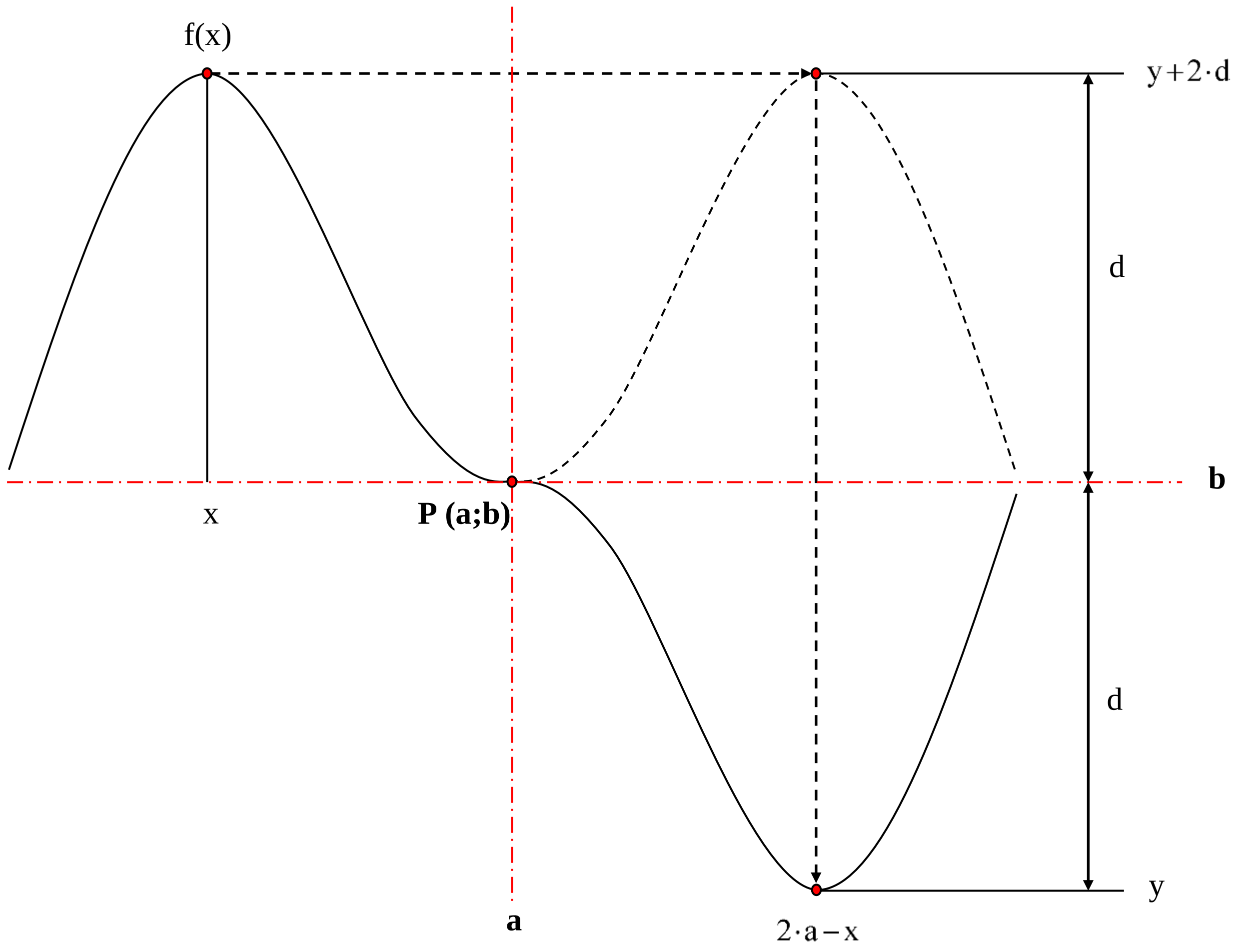
$$\underline{\underline{f(x) = f(2 \cdot a - x)}}$$

Diese Gleichung hat gegenüber f(x) = f(-x) den Vorteil, dass sich mit ihr alle Achsensymmetrien nachweisen lassen und nicht nur der Spezialfall der Symmetrie zur y-Achse.
Bei Polynomen geraden Grades ist grundsätzlich ein Nachweis für Achsensymmetrie erforderlich.
Nur bei geraden Polynomen darf die Symmetrie zur y-Achse ohne Nachweis festgestellt werden.

Punktsymmetrie

Punktsymmetrie liegt vor, wenn die Funktion sich durch Spiegelung an einem ihrer Punkte auf sich selbst abbilden lässt. Ein Spezialfall ist die Symmetrie zum Koordinatenursprung.

Punktsymmetrie: **Spiegelung an senkrechter (x = a) und waagerechter Achse (y = b).**



Bei der Punktsymmetrie handelt es sich eigentlich um eine doppelte Achsensymmetrie. Zunächst wird über die senkrechte Achse x = a gespiegelt. Anschließend wird das erhaltene Bild über die waagerechte Achse y = b gespiegelt. Vereinfacht ausgedrückt wird der von der senkrechten Achse links liegende Bereich der Funktion erst nach rechts und dann nach unten geklappt.

Bedingung

Erst wird ein Punkt an der senkrechten Achse x = a und anschließend an der waagerechten Achse y = b gespiegelt:

$f(x) = y + 2\cdot d$ | aus Spiegelung über Horizontale folgt: $d = b - y$

$f(x) = y + 2\cdot(b-y)$

$f(x) = y + 2\cdot b - 2\cdot y$

$f(x) = -y + 2\cdot b$ | aus Spiegelung über Vertikale folgt:

$y = f(2\cdot a - x)$

$$\underline{\underline{f(x) = -f(2\cdot a - x) + 2\cdot b}}$$

Diese Gleichung hat gegenüber f(-x) = -f(x) den Vorteil, dass alle Punktsymmetrien umfasst werden. Außerdem ist der Rechenaufwand geringer, da nur eine Seite der Gleichung umgeformt werden muss. Bei Polynomen ungeraden Grades ist grundsätzlich ein Nachweis für Punktsymmetrie erforderlich. Nur bei ungeraden Polynomen wird die Symmetrie zum Koordinatenursprung einfach festgestellt.

Symmetrienachweis

Der Symmetrienachweis beginnt immer mit einer Vermutung, welche dem Aussehen der Funktion zu entnehmen ist. Danach erfolgt das Prüfen der Symmetriebedingung, welche dann erfüllt sein muss. Anschließend kann eine gesicherte Aussage zur anfänglichen Vermutung getroffen werden.

Vermutung ⇨ **Bedingung** ⇨ **Aussage**

Oft wird die Aussage vorgegeben und nur eine Bedingungsprüfung verlangt.
Die Vermutung wird erstellt mit Hilfe von:

- Extremstellen und senkrechten Asymptoten für die Achsensymmetrie
- Sattel-, Wende- und Asymptotenschnittpunkte für die Punktsymmetrie

Funktionen und ihre Symmetrie

Funktion	Einteilung	Achsensymmetrie	Punktsymmetrie
Polynom	ungerader Grad	–	x
	gerader Grad	x	–
Bruchfunktion	jede	x	x
Wurzelfunktion	ungerade	x	x
	gerade	x	–
Exponentialfunktion	jede	x	–
Logarithmusfunktion	jede	x	–
Winkelfunktion	Sinus / Kosinus	x	x
	Tangens	–	x

Polynom

Bsp. 1 *geg.:* $f(x) = x^2 - 2 \cdot x$ *ges.:* Symmetrie

Lsg.: ***1. Vermutung***

Nach dem Aussehen kann Symmetrie zur Achse $x_E = 1$ vermutet werden.

2. Bedingung

$$f(x) = f(2 \cdot a - x)$$

$$f(x) = f(2 \cdot 1 - x)$$

$$f(x) = f(2 - x)$$

$$x^2 - 2 \cdot x = (2 - x)^2 - 2 \cdot (2 - x)$$

$$x^2 - 2 \cdot x = 4 - 4 \cdot x + x^2 - 4 + 2 \cdot x$$

$$\underline{\underline{x^2 - 2 \cdot x = x^2 - 2 \cdot x}} \quad \text{w.A.}$$

3. Aussage

Die Funktion f(x) ist somit symmetrisch zur Achse x = 1.

Bsp. 2 *geg.:* $f(x) = x^3 + 3 \cdot x^2 + 1$ *ges.:* Symmetrie

<u>*Lsg.:*</u> ***1. Vermutung***

Nach dem Aussehen kann Symmetrie zu $P_W(-1;3)$ vermutet werden.

2. Bedingung

$$f(x) = -f(2 \cdot a - x) + 2 \cdot b$$

$$f(x) = -f(-2 \cdot 1 - x) + 2 \cdot 3$$

$$f(x) = -f(-2 - x) + 6$$

$$x^3 + 3 \cdot x^2 + 1 = -\left[(-2 - x)^3 + 3 \cdot (-2 - x)^2 + 1\right] + 2 \cdot 3$$

$$x^3 + 3 \cdot x^2 + 1 = -\left(-8 - 3 \cdot 4 \cdot x - 6 \cdot x^2 - x^3 + 12 + 12 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 1\right) + 6$$

$$x^3 + 3 \cdot x^2 + 1 = 8 + 12 \cdot x + 6 \cdot x^2 + x^3 - 12 - 12 \cdot x - 3 \cdot x^2 - 1 + 6$$

$$\underline{\underline{x^3 + 3 \cdot x^2 + 1 = x^3 + 3 \cdot x^2 + 1}} \quad \text{w.A.}$$

3. Aussage

Die Funktion f(x) ist somit symmetrisch zum Punkt P (–1;3).

Bruchfunktion

Bsp. 3 *geg.:* $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ *ges.:* Symmetrie

<u>Lsg.:</u> ***1. Vermutung***

Nach dem Aussehen kann Symmetrie zur Achse $x_E=0$ vermutet werden.

2. Bedingung

$$f(x)=f\left(2\cdot a-x\right)$$
$$f(x)=f\left(2\cdot 0-x\right)$$
$$f(x)=f\left(-x\right)$$
$$\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{\left(-x\right)^2+1}{\left(-x\right)^2-1}$$
$$\underline{\underline{\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{x^2+1}{x^2-1}}}\quad \text{w.A.}$$

3. Aussage

Die Funktion f(x) ist somit symmetrisch zur y-Achse.

Bsp. 4 *geg.:* $f(x)=\frac{x}{x-1}$ *ges.:* Symmetrie

<u>*Lsg.:*</u> ***1. Vermutung***

Asymptotenschnittpunkt mit $x_t=1$ und $y_t=1$.
Nach dem Aussehen kann Symmetrie zum Punkt $P_t(1;1)$ vermutet werden.

2. Bedingung

$$f(x)=-f(2\cdot a-x)+2\cdot b$$
$$f(x)=-f(2\cdot 1-x)+2\cdot 1$$
$$f(x)=-f(2-x)+2$$

$$\frac{x}{x-1}=-\frac{2-x}{(2-x)-1}+2$$

$$\frac{x}{x-1}=\frac{2-x}{-(-x+1)}+2\cdot\frac{x-1}{x-1}$$

$$\frac{x}{x-1}=\frac{2-x+2\cdot x-2}{x-1}$$

$$\underline{\underline{\frac{x}{x-1}=\frac{x}{x-1}}} \quad \text{w.A.}$$

3. Aussage

Die Funktion f(x) ist somit symmetrisch zum Punkt P (1;1).

Bsp. 5 *geg.:* $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ *ges.:* Symmetrie

<u>*Lsg.:*</u> ***1. Vermutung***

Asymptotenschnittpunkt mit $x_t=1$ und $y_t=x+1$ (x_t in y_t einsetzen).
Nach dem Aussehen kann Symmetrie zum Punkt $P_t(1;2)$ vermutet werden.

2. Bedingung

$$f(x)=-f(2\cdot a-x)+2\cdot b$$

$$f(x)=-f(2\cdot 1-x)+2\cdot 2$$

$$f(x)=-f(2-x)+4$$

$$\frac{x^2+1}{x-1}=-\frac{(2-x)^2+1}{(2-x)-1}+4$$

$$\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{4-4\cdot x+x^2+1}{-(-x+1)}+4\cdot\frac{x-1}{x-1}$$

$$\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{4-4\cdot x+x^2+1+4\cdot x-4}{x-1}$$

$$\underline{\underline{\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{x^2+1}{x-1}}} \quad \text{w.A.}$$

3. Aussage

Die Funktion f(x) ist somit symmetrisch zum Punkt P (1;2).

Wurzelfunktion

Bsp. 6 *geg.:* $f(x)=\sqrt{x^2+2\cdot x+1}$ *ges.:* Symmetrie

Lsg.: ***1. Vermutung***

Nach dem Aussehen kann Symmetrie zur Achse $x_E=-1$ vermutet werden.

2. Bedingung

$$f(x)=f(2\cdot a-x)$$
$$f(x)=f(-2\cdot 1-x)$$
$$f(x)=f(-2-x)$$

$$\sqrt{x^2+2\cdot x+1}=\sqrt{(-2-x)^2+2\cdot(-2-x)+1}$$
$$\sqrt{x^2+2\cdot x+1}=\sqrt{4+4\cdot x+x^2-4-2\cdot x+1}$$
$$\underline{\underline{\sqrt{x^2+2\cdot x+1}=\sqrt{x^2+2\cdot x+1}}} \quad \text{w.A.}$$

3. Aussage

Die Funktion f(x) ist somit symmetrisch zur Achse x = –1.

Bsp. 7 *geg.:* $f(x)=\sqrt[3]{x^2-4\cdot x+1}$ *ges.:* Symmetrie

Lsg.: ***1. Vermutung***

Nach dem Aussehen kann Symmetrie zur Achse $x_E=2$ vermutet werden.

2. Bedingung

$$f(x)=f(2\cdot a-x)$$

$$f(x)=f(2\cdot 2-x)$$

$$f(x)=f(4-x)$$

$$\sqrt[3]{x^2-4\cdot x+1}=\sqrt[3]{(4-x)^2-4\cdot(4-x)+1}$$

$$\sqrt[3]{x^2-4\cdot x+1}=\sqrt[3]{16-8\cdot x+x^2-16+4\cdot x+1}$$

$$\underline{\underline{\sqrt[3]{x^2-4\cdot x+1}=\sqrt[3]{x^2-4\cdot x+1}}} \quad \text{w.A.}$$

3. Aussage

Die Funktion f(x) ist somit symmetrisch zur Achse x = 2.

Bsp. 8 *geg.:* $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3\cdot x}$ *ges.:* Symmetrie

<u>*Lsg.:*</u> ***1. Vermutung***

Nach dem Aussehen kann Symmetrie zum Punkt O (0;0) vermutet werden.

2. Bedingung

$$f(x)=-f\left(2\cdot a-x\right)+2\cdot b$$

$$f(x)=-f\left(2\cdot 0-x\right)+2\cdot 0$$

$$f(x)=-f\left(-x\right)$$

$$\sqrt[3]{x^3-3\cdot x}=-\sqrt[3]{\left(-x\right)^3-3\cdot\left(-x\right)}$$

$$\sqrt[3]{x^3-3\cdot x}=-\sqrt[3]{-x^3+3\cdot x}$$

$$\underline{\underline{\sqrt[3]{x^3-3\cdot x}=\sqrt[3]{x^3-3\cdot x}}} \quad \text{w.A.}$$

3. Aussage

Die Funktion f(x) ist somit symmetrisch zum Koordinatenursprung.

Exponentialfunktion

Bsp. 9 *geg.:* $f(x) = e^{x^2-2\cdot x+1}$ *ges.:* Symmetrie

Lsg.: ***1. Vermutung***

Nach dem Aussehen kann Symmetrie zur Achse $x_E = 1$ vermutet werden.

2. Bedingung

$$f(x) = f(2\cdot a - x)$$

$$f(x) = f(2\cdot 1 - x)$$

$$f(x) = f(2 - x)$$

$$e^{x^2-2\cdot x+1} = e^{(2-x)^2-2\cdot(2-x)+1}$$

$$e^{x^2-2\cdot x+1} = e^{4-4\cdot x+x^2-4+2\cdot x+1}$$

$$\underline{\underline{e^{x^2-2\cdot x+1} = e^{x^2-2\cdot x+1}}} \quad \text{w.A.}$$

3. Aussage

Die Funktion f(x) ist somit symmetrisch zur Achse x = 1.

Logarithmusfunktion

Bsp. 10 *geg.:* $f(x)=\ln\left(x^2+4\cdot x+5\right)$ *ges.:* Symmetrie

<u>*Lsg.:*</u> ***1. Vermutung***

Nach dem Aussehen kann Symmetrie zur Achse x = –2 vermutet werden.

2. Bedingung

$$f(x)=f\left(2\cdot a-x\right)$$

$$f(x)=f\left(-2\cdot 2-x\right)$$

$$f(x)=f\left(-4-x\right)$$

$$\ln\left(x^2+4\cdot x+5\right)=\ln\left[\left(-4-x\right)^2+4\cdot\left(-4-x\right)+5\right]$$

$$\ln\left(x^2+4\cdot x+5\right)=\ln\left(16+8\cdot x+16\cdot x^2-16-4\cdot x+5\right)$$

$$\underline{\underline{\ln\left(x^2+4\cdot x+5\right)=\ln\left(x^2+4\cdot x+5\right)}}\quad \text{w.A.}$$

3. Aussage

Die Funktion f(x) ist somit symmetrisch zur Achse x = –2.

Winkelfunktion

Bsp. 11 *geg.:* $f(x)=4\cdot\sin(2\cdot x+4)$ *ges.:* Symmetrie

Lsg.: ***1. Vermutung***

Nach dem Aussehen wird Symmetrie zur Achse $x_E=-2+\left(\frac{1}{2}+k\right)\cdot\frac{\pi}{2}$ vermutet.
Außerdem kann auch Symmetrie zu den Punkten $P_W\left(-2+k\cdot\frac{\pi}{2};0\right)$ vermutet werden.

2. Bedingung

Achsensymmetrie

$f(x)=f(2\cdot a-x)$ | Es ist günstig, k = 0 als Periode zu haben.

$f(x)=f\left[2\cdot\left(-2+\frac{\pi}{4}\right)-x\right]$

$f(x)=f\left(-4+\frac{\pi}{2}-x\right)$

$4\cdot\sin(2\cdot x+4)=4\cdot\sin\left[2\cdot\left(-4+\frac{\pi}{2}-x\right)+4\right]$

$4\cdot\sin(2\cdot x+4)=4\cdot\sin(-2\cdot x-4+\pi)$

$4\cdot\sin(2\cdot x+4)=4\cdot\sin(-2\cdot x-4)\cdot(-1)$

$\underline{\underline{4\cdot\sin(2\cdot x+4)=4\cdot\sin(2\cdot x+4)}}$ w.A.

Punktsymmetrie

$f(x)=-f(2\cdot a-x)+2\cdot b$ | Es ist günstig, k = 0 als Periode zu haben.

$f(x)=-f(-2\cdot 2-x)+2\cdot 0$

$f(x)=-f(-4-x)$

$4\cdot\sin(2\cdot x+4)=-4\cdot\sin\left[2\cdot(-4-x)+4\right]$

$4\cdot\sin(2\cdot x+4)=-4\cdot\sin(-2\cdot x-4)$

$\underline{\underline{4\cdot\sin(2\cdot x+4)=4\cdot\sin(2\cdot x+4)}}$ w.A.

3. Aussage

Die Funktion f(x) ist somit sowohl symmetrisch zu den Achsen $x=-2+\left(\frac{1}{2}+k\right)\cdot\frac{\pi}{2}$ als auch zu den Punkten $P\left(-2+k\cdot\frac{\pi}{2};0\right)$.

Bsp. 12 *geg.:* $f(x)=4\cdot\cos(2\cdot x+4)$ *ges.:* Symmetrie

Lsg.: ***1. Vermutung***

Nach dem Aussehen wird Symmetrie zur den Achsen $x_E=-2+k\cdot\frac{\pi}{2}$ vermutet.
Außerdem wird auch Symmetrie zu den Punkten $P_W\left(-2+\left(\frac{1}{2}+k\right)\cdot\frac{\pi}{2};0\right)$ vermutet.

2. Bedingung

Achsensymmetrie

$f(x)=f(2\cdot a-x)$ | Es ist günstig, k = 0 als Periode zu haben.

$f(x)=f(-2\cdot 2-x)$

$f(x)=f(-4-x)$

$4\cdot\cos(2\cdot x+4)=4\cdot\cos[2\cdot(-4-x)+4]$

$4\cdot\cos(2\cdot x+4)=4\cdot\cos(-2\cdot x-4)$

$\underline{\underline{4\cdot\cos(2\cdot x+4)=4\cdot\cos(2\cdot x+4)}}$ w.A.

Punktsymmetrie

$f(x)=-f(2\cdot a-x)+2\cdot b$ | Es ist günstig, k = 0 als Periode zu haben.

$f(x)=-f\left[2\cdot\left(-2+\frac{\pi}{4}\right)-x\right]+2\cdot 0$

$f(x)=-f\left(-4+\frac{\pi}{2}-x\right)$

$4\cdot\cos(2\cdot x+4)=4\cdot\cos\left[2\cdot\left(-4+\frac{\pi}{2}-x\right)+4\right]$

$4\cdot\cos(2\cdot x+4)=4\cdot\cos(-2\cdot x-4+\pi)$

$4\cdot\cos(2\cdot x+4)=-4\cdot\cos(-2\cdot x-4)\cdot(-1)$

$4\cdot\cos(2\cdot x+4)=4\cdot\cos(-2\cdot x-4)$

$\underline{\underline{4\cdot\cos(2\cdot x+4)=4\cdot\cos(2\cdot x+4)}}$ w.A.

3. Aussage

Die Funktion f(x) ist somit sowohl symmetrisch zu den Achsen $x=-2+k\cdot\frac{\pi}{2}$ als auch zu den Punkten $P\left(-2+\left(\frac{1}{2}+k\right)\cdot\frac{\pi}{2};0\right)$.

Bsp. 13 *geg.:* $f(x) = 4 \cdot \tan(2 \cdot x + 4)$ *ges.:* Symmetrie

Lsg.: ***1. Vermutung***

Nach dem Aussehen wird Symmetrie zu den Punkten $P_W\left(-2 + k \cdot \frac{\pi}{2}; 0\right)$ vermutet.

2. Bedingung

$f(x) = -f(2 \cdot a - x) + 2 \cdot b$ | Es ist günstig, k = 0 als Periode zu haben.

$f(x) = -f(-2 \cdot 2 - x) + 2 \cdot 0$

$f(x) = -f(-4 - x)$

$4 \cdot \tan(2 \cdot x + 4) = -4 \cdot \tan\left[2 \cdot (-4 - x) + 4\right]$

$4 \cdot \tan(2 \cdot x + 4) = -4 \cdot \tan(-8 - 2 \cdot x + 4)$

$4 \cdot \tan(2 \cdot x + 4) = -4 \cdot \tan(-2 \cdot x - 4)$

$\underline{\underline{4 \cdot \tan(2 \cdot x + 4) = 4 \cdot \tan(2 \cdot x + 4)}}$ w.A.

3. Aussage

Die Funktion f(x) ist somit symmetrisch zu den Punkten $P\left(-2 + k \cdot \frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Allgemeine Symmetriebetrachtungen

Bsp. 14 *geg.:* Lineare Funktion *ges.:* Symmetrie

Lsg.: ***1. Vermutung***

Nach dem Aussehen kann Symmetrie zu jedem Punkt der Funktion vermutet werden.

2. Bedingung

$$f(x) = -f(2 \cdot a - x) + 2 \cdot b \qquad | \; P(a; f(a))$$

$$f(x) = -f(2 \cdot a - x) + 2 \cdot f(a)$$

$$m \cdot x + c = -\left[m \cdot (2 \cdot a - x) + c\right] + 2 \cdot (m \cdot a + c)$$

$$m \cdot x + c = -(2 \cdot m \cdot a - m \cdot x + c) + 2 \cdot m \cdot a + 2 \cdot c$$

$$m \cdot x + c = -2 \cdot m \cdot a + m \cdot x - c + 2 \cdot m \cdot a + 2 \cdot c$$

$$\underline{\underline{m \cdot x + c = m \cdot x + c}} \qquad \text{w.A.}$$

3. Aussage

Lineare Funktionen sind somit zu jedem ihrer Punkte symmetrisch.

Bsp. 15 *geg.:* gerades Polynom *ges.:* Symmetrie

Lsg.: ***1. Vermutung***

Nach dem Aussehen kann Symmetrie zur Achse $x_E = 0$ vermutet werden.

2. Bedingung

$$f(x) = f(2 \cdot a - x)$$

$$f(x) = f(2 \cdot 0 - x)$$

$$f(x) = f(-x)$$ | Polynom nur mit geraden Exponenten

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^{2 \cdot i} = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot (-x)^{2 \cdot i}$$ | gerade Potenz von positiver Zahl = (+)

$$\underline{\underline{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^{2 \cdot i} = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^{2 \cdot i}}} \quad \text{w.A.}$$

3. Aussage

Gerade Polynome sind somit symmetrisch zur y-Achse.

Bsp. 16 *geg.:* ungerades Polynom *ges.:* Symmetrie

<u>*Lsg.:*</u> ***1. Vermutung***

Nach dem Aussehen kann Symmetrie zum Punkt O (0;0) vermutet werden.

2. Bedingung

$$f(x) = -f(2 \cdot a - x) + 2 \cdot b$$

$$f(x) = -f(2 \cdot 0 - x) + 2 \cdot 0$$

$$f(x) = -f(-x)$$ | Polynom nur mit ungeraden Exponenten

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^{2 \cdot i+1} = -\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot (-x)^{2 \cdot i+1}$$ | ungerade Potenz von negativen Zahl = (–)

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^{2 \cdot i+1} = -\sum_{i=0}^{n} -a_i \cdot x^{2 \cdot i+1}$$

$$\underline{\underline{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^{2 \cdot i+1} = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^{2 \cdot i+1}}} \quad \text{w.A.}$$

3. Aussage

Ungerade Polynome sind somit symmetrisch zum Koordinatenursprung.