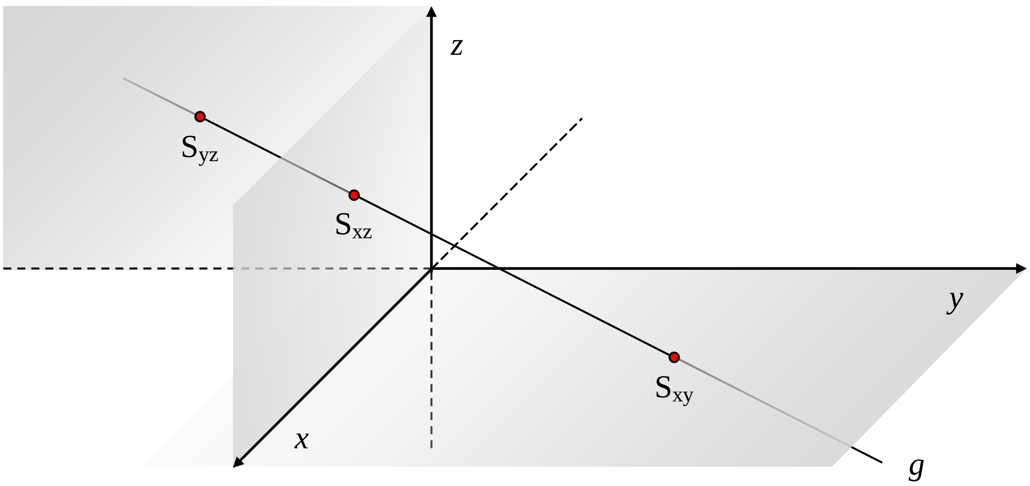
Spurpunkte

Spurpunkte sind in Geraden oder Ebenen enthalten. Als Schnittpunkte mit dem Koordinatensystem sind sie zur Lagebeschreibung nutzbar und helfen, die Koordinaten eines unbekannten Geraden- oder Ebenenpunkts festzunageln.

<u>Spurpunkt:</u> **Durchstoßpunkt einer Gerade mit einer Ebene.**

Geradenspurpunkt

<u>Geradenspurpunkt:</u> **Durchstoßpunkt der Gerade g mit einer Grundebene.**



S_{xy} = Durchstoßpunkt mit E_{xy}: $z = 0 \Rightarrow 0 = z_A + t \cdot z_a \Rightarrow \overrightarrow{S_{xy}} = \vec{A} - \frac{z_A}{z_a} \cdot \vec{a}$

S_{xz} = Durchstoßpunkt mit E_{xz}: $y = 0 \Rightarrow 0 = y_A + t \cdot y_a \Rightarrow \overrightarrow{S_{xz}} = \vec{A} - \frac{y_A}{y_a} \cdot \vec{a}$

S_{yz} = Durchstoßpunkt mit E_{yz}: $x = 0 \Rightarrow 0 = x_A + t \cdot x_a \Rightarrow \overrightarrow{S_{yz}} = \vec{A} - \frac{x_A}{x_a} \cdot \vec{a}$

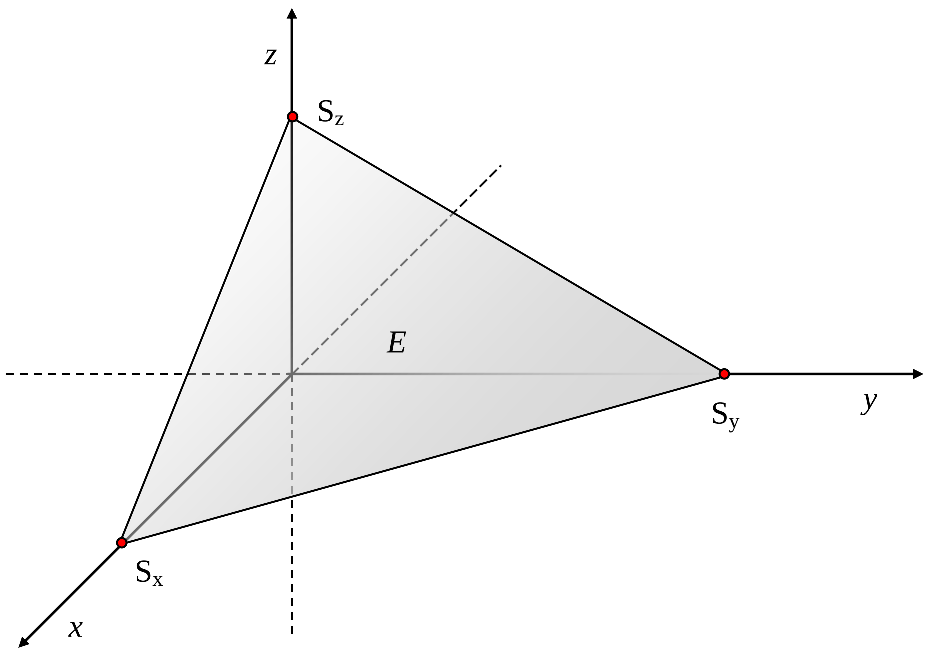
Geraden haben mindestens einen Spurpunkt und können maximal drei Spurpunkte besitzen.

Die genaue Anzahl ist von den Nullkoordinaten des Richtungsvektors abhängig.

Spurpunktanzahl	**Nullkoordinate des Richtungsvektors**	**Geradenspurpunkte**
1	$x = y = 0$	S_{xy}
	$x = z = 0$	S_{xz}
	$y = z = 0$	S_{yz}
2	$x = 0$	S_{xy} / S_{xz}
	$y = 0$	S_{xy} / S_{yz}
	$z = 0$	S_{xz} / S_{yz}
3	–	S_{xy} / S_{xz} / S_{yz}

Ebenenspurpunkt

Ebenenspurpunkt: **Durchstoßpunkt einer Koordinatenachse mit der Ebene E.**



S_x = Durchstoßpunkt mit x-Achse: $y = z = 0$ ⇨ $E: a \cdot x = d$ ⇨ $S_x\left(\frac{d}{a};0;0\right)$

S_y = Durchstoßpunkt mit y-Achse: $x = z = 0$ ⇨ $E: b \cdot y = d$ ⇨ $S_y\left(0;\frac{d}{b};0\right)$

S_z = Durchstoßpunkt mit z-Achse: $x = y = 0$ ⇨ $E: c \cdot z = d$ ⇨ $S_z\left(0;0;\frac{d}{c}\right)$

Spurpunkte sind bei Ebenen in der Achsenabschnittsform E: $\frac{x}{\frac{d}{a}} + \frac{y}{\frac{d}{b}} + \frac{z}{\frac{d}{c}} = 1$ direkt abzulesen.

Ebenen haben mindestens einen Spurpunkt und können maximal drei Spurpunkte besitzen.
Bei drei Spurpunkten existiert ein Spurdreieck zwischen den Ebenenspurpunkten (vgl. Skizze).
Die genaue Anzahl ist von den Nullkoordinaten des Normalenvektors abhängig.

Spurpunktanzahl	**Nullkoordinate des Normalenvektors**	**Ebenenspurpunkte**
1	$x = y = 0$	S_z
	$x = z = 0$	S_y
	$y = z = 0$	S_x
2	$x = 0$	S_y / S_z
	$y = 0$	S_x / S_z
	$z = 0$	S_x / S_y
3	–	S_x / S_y / S_z

Bsp. 1 *geg.:* $g: \vec{x} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}} + t \cdot \overrightarrow{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$ *ges.:* Spurpunkte

Lsg.: Es existieren alle 3 Spurpunkte, da der Richtungsvektor keine Nullkoordinate hat.

1. Durchstoßpunkt mit x-y-Ebene

$$\overrightarrow{S_{xy}} = \vec{A} - \frac{z_A}{z_a} \cdot \vec{a} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}} - \frac{9}{3} \cdot \overrightarrow{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} 4-6 \\ 2-6 \\ 9-9 \end{pmatrix}} = \underline{\underline{\overrightarrow{\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}}}}$$

2. Durchstoßpunkt mit x-z-Ebene

$$\overrightarrow{S_{xz}} = \vec{A} - \frac{y_A}{y_a} \cdot \vec{a} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}} - \frac{2}{2} \cdot \overrightarrow{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} 4-2 \\ 2-2 \\ 9-3 \end{pmatrix}} = \underline{\underline{\overrightarrow{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}}}}$$

3. Durchstoßpunkt mit y-z-Ebene

$$\overrightarrow{S_{yz}} = \vec{A} - \frac{x_A}{x_a} \cdot \vec{a} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}} - \frac{4}{2} \cdot \overrightarrow{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} 4-4 \\ 2-4 \\ 9-6 \end{pmatrix}} = \underline{\underline{\overrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}}}$$

Bsp. 2 *geg.:* $g:\vec{x}=\overrightarrow{\begin{pmatrix}4\\2\\9\end{pmatrix}}+t\cdot\overrightarrow{\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}}$ *ges.:* Spurpunkte

Lsg.: Es gibt nur die Spurpunkte S_{xy} und S_{yz}, da der Richtungsvektor y = 0 als Koordinate hat.

1. Durchstoßpunkt mit x-y-Ebene

$$\overrightarrow{S_{xy}}=\vec{A}-\frac{z_A}{z_a}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{\begin{pmatrix}4\\2\\9\end{pmatrix}}-\frac{9}{3}\cdot\overrightarrow{\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}}=\overrightarrow{\begin{pmatrix}4-6\\2-0\\9-9\end{pmatrix}}=\underline{\underline{\overrightarrow{\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}}}}$$

2. Durchstoßpunkt mit y-z-Ebene

$$\overrightarrow{S_{yz}}=\vec{A}-\frac{x_A}{x_a}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{\begin{pmatrix}4\\2\\9\end{pmatrix}}-\frac{4}{2}\cdot\overrightarrow{\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}}=\overrightarrow{\begin{pmatrix}4-4\\2-0\\9-6\end{pmatrix}}=\underline{\underline{\overrightarrow{\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}}}}$$

Bsp. 3 *geg.:* $g:\vec{x}=\overrightarrow{\begin{pmatrix}4\\2\\9\end{pmatrix}}+t\cdot\overrightarrow{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}$ *ges.:* Spurpunkte

Lsg.: Es gibt nur den Spurpunkte S_{xz}, da der Richtungsvektor x = z = 0 als Koordinaten hat.

Durchstoßpunkt mit x-z-Ebene

$$\overrightarrow{S_{xz}}=\vec{A}-\frac{y_A}{y_a}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{\begin{pmatrix}4\\2\\9\end{pmatrix}}-\frac{2}{1}\cdot\overrightarrow{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}=\overrightarrow{\begin{pmatrix}4-0\\2-2\\9-0\end{pmatrix}}=\underline{\underline{\overrightarrow{\begin{pmatrix}4\\0\\9\end{pmatrix}}}}$$

Bsp. 4 *geg.:* $g:\vec{x}=\overrightarrow{\begin{pmatrix}4\\2\\9\end{pmatrix}}+t\cdot\overrightarrow{\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}}$ *ges.:* Spurpunkte

Lsg.: Es existieren alle 3 Spurpunkte, da der Richtungsvektor keine Nullkoordinate hat.

1. Durchstoßpunkt mit x-y-Ebene

$$\overrightarrow{S_{xy}}=\vec{A}-\frac{z_A}{z_a}\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\2\\9\end{pmatrix}-\frac{9}{3}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-6\\2-3\\9-9\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}}}$$

2. Durchstoßpunkt mit x-z-Ebene

$$\overrightarrow{S_{xz}}=\vec{A}-\frac{y_A}{y_a}\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\2\\9\end{pmatrix}-\frac{2}{1}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-4\\2-2\\9-6\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}}}$$

3. Durchstoßpunkt mit y-z-Ebene

$$\overrightarrow{S_{yz}}=\vec{A}-\frac{x_A}{x_a}\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\2\\9\end{pmatrix}-\frac{4}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-4\\2-2\\9-6\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}}}$$

Die Spurpunkte einer Gerade können übereinstimmen, wenn diese eine Koordinatenachse schneidet. In diesem Fall existieren trotzdem noch 3 Spurpunkte, da die Gerade weiterhin alle 3 Grundebenen durchstößt. Für 2 Grundebenen passiert dies lediglich im selben Punkt.

Bsp. 5 *geg.:* $E: 2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot z = 12$ *ges.:* Spurpunkte und Achsenform

Lsg.: Es existieren alle 3 Spurpunkte, da der Normalenvektor keine Nullkoordinate besitzt.

1. Durchstoßpunkt mit x-Achse

$$S_x\left(\frac{d}{a};0;0\right) = \underline{\underline{S_x(6;0;0)}}$$

2. Durchstoßpunkt mit y-Achse

$$S_y\left(0;\frac{d}{b};0\right) = \underline{\underline{S_y(0;4;0)}}$$

3. Durchstoßpunkt mit z-Achse

$$S_z\left(0;0;\frac{d}{c}\right) = \underline{\underline{S_z(0;0;3)}}$$

4. Achsenabschnittsform der Ebene

$$\underline{\underline{E: \frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1}}$$

Bsp. 6 *geg.:* $E: 2 \cdot x + 3 \cdot y = 12$ *ges.:* Spurpunkte und Achsenform

Lsg.: Es gib nur die Spurpunkte S_x und S_y, da der Normalenvektor z = 0 als Nullkoordinate hat.

1. Durchstoßpunkt mit x-Achse

$$\underline{\underline{S_x(6;0;0)}}$$

2. Durchstoßpunkt mit y-Achse

$$\underline{\underline{S_y(0;4;0)}}$$

3. Achsenabschnittsform der Ebene

$$\underline{\underline{E: \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1}}$$

Bsp. 7 *geg.:* $E: 2 \cdot x = 12$ *ges.:* Spurpunkte und Achsenform

Lsg.: Es existiert nur der Spurpunkt S_x, da der Normalenvektor y = z = 0 als Koordinaten hat.

1. Durchstoßpunkt mit x-Achse

$$\underline{\underline{S_x(6;0;0)}}$$

2. Achsenabschnittsform der Ebene

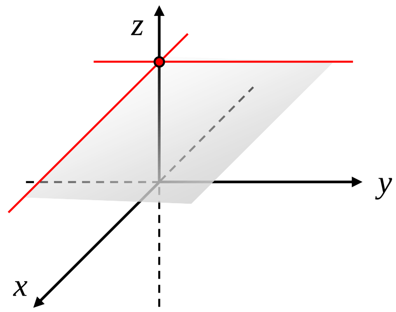
$$\underline{\underline{E: \frac{x}{6} = 1}}$$

Spurgerade

Spurgeraden sind im Gegensatz zu Spurpunkten nur in Ebenen enthalten.

<u>Spurgerade:</u> Schnittgerade der Ebene mit einer Grundebene

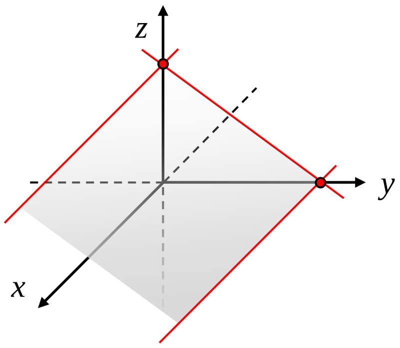
Eine Ebene schneidet mindestens zwei der drei Grundebenen. Die Spurgerade liegt in der Ebene und in der Grundebene, weshalb sie mindestens eine Koordinatenachse im Ebenenspurpunkt schneidet.



1 Spurpunkt – Spurgeradenbildung:

Stützvektor = Spurpunkt Richtungsvektor = Achsenvektor

Stützvektor = Spurpunkt Richtungsvektor = Achsenvektor

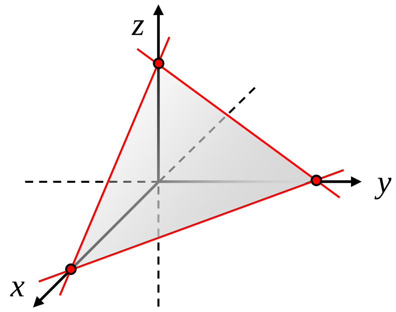


2 Spurpunkte – Spurgeradenbildung:

Stützvektor = 1. Spurpunkt Richtungsvektor = Achsenvektor

Stützvektor = 2. Spurpunkt Richtungsvektor = Achsenvektor

Stützvektor = Spurpunkt Richtungsvektor = Spurvektor



3 Spurpunkte – Spurgeradenbildung:

Verbindungsgerade von S_x und S_y ⇨ $g_{xy}: \vec{x} = \vec{S_x} + t \cdot \overrightarrow{S_x S_y}$

Verbindungsgerade von S_x und S_z ⇨ $g_{xz}: \vec{x} = \vec{S_x} + t \cdot \overrightarrow{S_x S_z}$

Verbindungsgerade von S_y und S_z ⇨ $g_{yz}: \vec{x} = \vec{S_y} + t \cdot \overrightarrow{S_y S_z}$

Sobald bekannt ist, wie die Schnittgerade zweier Ebenen ermittelt wird, kann auch direkt der Schnitt der Ebene mit den Grundebenen berechnet werden um die Spurgeraden anzugeben.

Thomas Pientka
www.mathemitnullplan.de
info@mathemitnullplan.de

Spurgeraden tauchen als Spezialfall von Lagebeziehungen auf und können wegen ihrem extravaganten Verhältnis zu Ebenenspurpunkten (sie sind eben nicht immer deren Verbindungs-geraden) schnell zu Verwirrungen führen. Mit ihrer Hilfe lassen sich Koordinatenformen zur Parameterform wandeln (Stützvektor ist der Ortsvektor zu einem Ebenenspurpunkt und Spannvektoren sind die Richtungsvektoren zweier Spurgeraden). Dies ist jedoch für das Lösen von Aufgaben überflüssig, da die allgemeine Koordinatenform alles abdeckt. Es ist sehr gut ohne die Spurgeraden auszukommen und es sollte sich nicht mehr als notwendig mit ihnen beschäftigt werden.

Bsp. 1 *geg.:* $E: 2 \cdot x = 12$ *ges.:* Spurgeraden

Lsg.: Spurgerade = Schnittgerade mit Grundebenen

1. Anzahl der Spurpunkte

Die Ebene hat den Spurpunkt $S_x(6;0;0)$ und schneidet damit die y-z-Ebene nicht.

2. Schnittgerade mit x-y-Ebene

$$g_{yz}: \vec{x} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + t \cdot \overrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

3. Schnittgerade mit x-z-Ebene

$$g_{xz}: \vec{x} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + s \cdot \overrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Bsp. 2 *geg.:* $E: 2\cdot x + 3\cdot y = 12$ *ges.:* Spurgeraden

Lsg.: Spurgerade = Schnittgerade mit Grundebenen

1. *Anzahl der Spurpunkte*

Die Ebene hat die 2 Spurpunkte $S_x(6;0;0)$ und $S_y(0;4;0)$.

2. *Schnittgerade x-y-Ebene*

$$g_{xy}: \vec{x} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + t\cdot \overrightarrow{\begin{pmatrix} 0-6 \\ 4-0 \\ 0-0 \end{pmatrix}} = \underline{\underline{\overrightarrow{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + t\cdot \overrightarrow{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}}} \quad \Big| \text{ mit } \tfrac{1}{2} \text{ vervielfacht}$$

3. *Schnittgerade mit x-z-Ebene*

$$\underline{\underline{g_{xz}: \vec{x} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + s\cdot \overrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}}$$

4. *Schnittgerade mit y-z-Ebene*

$$\underline{\underline{g_{yz}: \vec{x} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}} + r\cdot \overrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}}$$

Bsp. 3 *geg.:* $E: 2\cdot x + 3\cdot y + 4\cdot z = 12$ *ges.:* Spurgeraden

Lsg.: Spurgerade = Schnittgerade mit Grundebenen

1. *Anzahl der Spurpunkte*

Die Ebene hat die 3 Spurpunkte $S_x(6;0;0)$, $S_y(0;4;0)$ und $S_z(0;0;3)$.

2. *Schnittgerade mit x-y-Ebene*

$$g_{xy}: \vec{x} = \overrightarrow{S_x} + t\cdot\overrightarrow{S_xS_y} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0-6\\4-0\\0-0\end{pmatrix} \qquad \mid \text{mit } \tfrac{1}{2} \text{ vervielfacht}$$

$$g_{xy}: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$$

3. *Schnittgerade mit x-z-Ebene*

$$g_{xz}: \vec{x} = \overrightarrow{S_x} + t\cdot\overrightarrow{S_xS_z} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0-6\\0-0\\3-0\end{pmatrix} \qquad \mid \text{mit } \tfrac{1}{3} \text{ vervielfacht}$$

$$g_{xz}: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$$

4. *Schnittgerade mit y-z-Ebene*

$$g_{yz}: \vec{x} = \overrightarrow{S_z} + t\cdot\overrightarrow{S_zS_y} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0-0\\4-0\\0-3\end{pmatrix}$$

$$g_{yz}: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}$$

Thomas Pientka
www.mathemitnullplan.de
info@mathemitnullplan.de